

$$f(t) = \frac{c^{\tau} (ct)^{\tau-1} e^{-ct}}{(\tau-1)!}$$

$t \geq 0, \tau > 0, c$ θετικός αλγεβραϊκός.

$$G(c, \frac{1}{c})$$

$$x \sim G(a, b)$$

$$\frac{a^a x^{a-1} e^{-x/b}}{\Gamma(a)}$$

$$a, b \geq 0$$

$$x \geq 0$$

Αν θεωρήσω $x_i \sim \text{Exp}(Ac)$ τότε $x = \sum_{i=1}^n x_i \sim G(\tau, \frac{1}{Ac})$

$$E(x) = \frac{1}{A}$$

Συστήματα $M/G/1/\infty$

$$b(t) = \frac{c^{\tau} (ct)^{\tau-1} e^{-ct}}{(\tau-1)!}$$

$$G(\tau, \frac{1}{c\mu})$$

(γνωρίζει τις ιδιότητες της αλυσίδας)

Έστω $f(t)$: ο αριθμός των πελατών στο σύστημα την χρονική στιγμή t

χρόνος εξυπηρέτησης i στην σειρά n

$u(t)$: ο αριθμός των φάσεων του εξυπηρετούμενου την χρονική στιγμή t

$$u(t) = c(f(t) - 1) + \tau - 1 + 1$$

$$u(t) = c f(t) - i + 1$$

$$q_n(t) = P(u(t) = n | u(0) = 0)$$

$$q_n = \lim_{t \rightarrow \infty} q_n(t)$$

$$P_k(t) = P(R(t) = k \mid R(0) = 0)$$

$$P_k = \lim_{t \rightarrow \infty} P_k(t)$$

Θέλω να βρω τις πιθανότητες P_k για όλους τους k .

$$P_n = q_{c(n-1)+c} + q_{c(n-1)+c-1} + \dots + q_{c(n-1)+1}$$

$$\text{Άρα } P_n = \sum_{j=c(n-1)+1}^{c(n-1)+c} q_j$$

Στην σειρά ο $n-1$ βρίσκεται στην $q_{c(n-1)+c}$ και ο n σε όλα από τα προηγούμενα

$$\rightarrow t \quad t+dt$$

$$1 \xrightarrow{\text{αway}} 0$$

$$0 \xrightarrow{\text{όχι αγωγή}} 0$$

$$q_0(t+dt) = q_1(t) (c\mu dt + o(dt)) + q_0(t) (1 - d dt + o(dt))$$

$$\frac{q_0(t+dt) - q_0(t)}{dt} = c\mu q_1(t) - d q_0(t)$$

$$\frac{d q_0(t)}{dt} + d q_0(t) = c\mu q_1(t)$$

$$d q_0 = c\mu q_1$$

$$\rightarrow 2 \xrightarrow{\text{αway}} 1$$

$$1 \xrightarrow[\text{αway αγωγή}]{\text{όχι αγωγή}} 1$$

$$q_1(t+dt) = q_1(t) (c\mu + o(dt)) + q_2(t) (1 - (d + c\mu) dt + o(dt))$$

$$\frac{d q_1(t)}{dt} + (d + c\mu) q_1(t) = q_2(t) c\mu$$

$$t \rightarrow \infty \quad (A + \tau\mu) q_1 = \tau\mu q_2$$

$$\rightarrow \tau+1 \xrightarrow{\text{avg}} \tau$$

$$\tau \xrightarrow[\text{OUTE avg.}]{\text{OXI avg.}} \tau$$

$$0 \xrightarrow{\text{avg.}} \tau$$

$$q_c(t+dt) = q_{c+1}(t)(\tau\mu dt + o(dt)) + q_c(t)(1 - (A + \tau\mu)dt + o(dt)) + q_0(t)(A dt + o(dt))$$

$$\frac{dq_c(t)}{dt} + (A + \tau\mu)q_c(t) = q_{c+1}(t)\tau\mu + q_0(t)A$$

$$(A + \tau\mu)q_c = \tau\mu q_{c+1} + dq_0$$

Σωδινά δομών είνω:

$$\begin{aligned} x^0 & \cdot (dq_0 = \tau\mu q_1) \\ x^1 & \cdot ((A + \tau\mu)q_1 = \tau\mu q_2) \\ & \vdots \\ x^{c-1} & \cdot ((A + \tau\mu)q_{c-1} = \tau\mu q_c) \\ x^c & \cdot ((A + \tau\mu)q_c = \tau\mu q_{c+1} + Aq_0) \end{aligned}$$

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j \quad |x| < 1$$

$$\lambda Q(x) + \tau\mu(Q(x) - q_0) = \frac{\tau\mu}{x}(Q(x) - q_0) + \lambda x^c Q(x)$$

$$Q(x) = \frac{\tau\mu(1 - \frac{1}{x})q_0}{\lambda + \tau\mu - \frac{\tau\mu}{x} - \lambda x^c} = \frac{\tau\mu q_0(1-x)}{\tau\mu + \lambda x^{c+1} - (\lambda + \tau\mu)x}$$

$$Q(1) = 1$$

$$Q(1) = \frac{-c\mu q_0}{A(c+1) - (d+c\mu)} \Rightarrow 1 = \frac{-c\mu q_0}{cA - c\mu} \Rightarrow q_0 = \frac{\mu - d}{\mu}$$

$$q_0 = 1 - \frac{A}{\mu} = 1 - \rho$$

Έστω $f(x) = Ax^{c+1} - Ax$

$$g(x) = c\mu x - c\mu$$

$$f(x) - g(x) = Ax^{c+1} - (d+c\mu)x + c\mu$$

$$f(x) = Ax(x^c - 1) = Ax(x-1)(x^{c-1} + x^{c-2} + \dots + 1)$$

$$g(x) = c\mu(x-1) \quad (\delta\epsilon\upsilon \text{ \textit{έχει ρίζες σαν πολυώνυμο})}$$

$$|f(x)| = A|x|(x-1) \cdot |x^{c-1} + x^{c-2} + \dots + 1| \leq A|x-1| \left(|x^{c-1}| + \dots + 1 \right) \leq A|x-1|c$$

$$|f(x)| < |g(x)| \quad \rho < 1 \quad (\text{όσα ρίζες \textit{έχει} η g \textit{της έχει και η f}})$$

Άρα $Q(x) = \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_c}{x-x_c}$

$$Q(x) = \left(-\frac{A_1}{x_1} \right) \frac{1}{1 - \frac{x}{x_1}} + \left(-\frac{A_2}{x_2} \right) \frac{1}{1 - \frac{x}{x_2}} + \dots + \left(-\frac{A_c}{x_c} \right) \frac{1}{1 - \frac{x}{x_c}} =$$

$$\left(\mu\epsilon \frac{x}{x_i} < 1 \right)$$

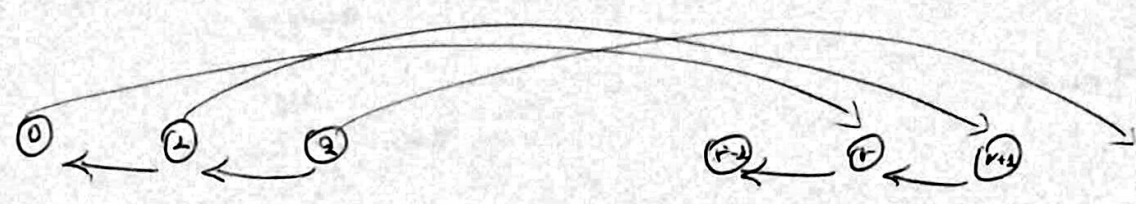
$$= -\frac{A_1}{x_1} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_1} \right)^j - \frac{A_2}{x_2} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_2} \right)^j - \dots - \frac{A_c}{x_c} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_c} \right)^j$$

$$Q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j$$

$$q_j = -\frac{A_1}{x_1^{j+1}} - \frac{A_2}{x_2^{j+1}} - \dots - \frac{A_c}{x_c^{j+1}} = -\sum_{k=1}^c \frac{A_k}{x_k^{j+1}}$$

$$P_n = \sum_{j=c(n-1)+1}^{c(n-1)+c} q_j$$

Σύστημα $\mu^{[c]} / \mu / 1 / \infty$



$$\lambda P_0 = \hat{\mu} P_1$$

$$(\lambda + \hat{\mu}) P_1 = \hat{\mu} P_2$$

$$(\lambda + \hat{\mu}) P_{r-1} = \hat{\mu} P_r$$

$$(\lambda + \hat{\mu}) P_r = \hat{\mu} P_{r+1} + \lambda P_0$$

Παρατηρώ ότι είναι ίδιο με το προηγούμενο για $\hat{\mu} = c\mu$

Σύστημα $Er / \mu / 1 / \infty$

Χρόνος εξυπηρέτησης $Exp(\mu)$

Χρόνος μεταξύ διαδοχικών αφίξεων $d(t) = \frac{c\lambda (c\lambda t)^{c-1} e^{-c\lambda t}}{(c-1)!}, t \geq 0$

Έστω $f(t)$: ο αριθμός πελάτων στο σύστημα την χρονική στιγμή t

$w(t)$: ο αριθμός φάσεων που υπάρχουν στο σύστημα την χρονική στιγμή t

$$w(t) = c f(t) + i - 1$$

$$P_n(t) = P(f(t) = n / f(0) = 0)$$

$$P_n = \lim_{t \rightarrow \infty} P_n(t)$$

$$q_u(t) = P(u(t) = u \mid u(0) = 0)$$

$$q_u = \lim_{t \rightarrow \infty} q_u(t)$$

$$P_u = q_{c0} + q_{c1} + \dots + q_{c+(z-1)}$$

$$P_u = \sum_{i=0}^{z-1} q_{c+i}$$

$$\rightarrow t \quad t+dt$$

$$0 \xrightarrow{\text{refici avaytu}} 0$$

$$z \xrightarrow{\text{avaytu}} 0$$

$$q_0(t+dt) = q_c(t)(\mu dt + o(dt)) + q_0(t)(1 - z dt + o(dt))$$

$$\frac{dq_0(t)}{dt} + z dq_0(t) = \mu q_c(t)$$

$$z dq_0 = \mu q_c$$

$$\rightarrow t \quad t+dt$$

$$1 \xrightarrow{\text{refici avaytu}} 1$$

$$c+1 \xrightarrow{\text{avaytu}} 1$$

$$0 \xrightarrow{\text{avaytu}} 1$$

$$q_1(t+dt) = q_{c+1}(t)(\mu dt + o(dt)) + q_1(t)(1 - z dt + o(dt)) + q_0(t)(z dt + o(dt))$$

$$\frac{dq_1(t)}{dt} + z dq_1(t) = \mu q_{c+1}(t) + z dq_0(t)$$

$$e \Delta q_z = \mu q_{z+1} + z \Delta q_0$$

-4-

$$\rightarrow \quad + \quad t+dt$$

$$z \xrightarrow[\text{αύξηση αγωγιμότητας}]{\text{αύξηση αγωγιμότητας}} z$$

$$2z \xrightarrow[\text{αύξηση αγωγιμότητας}]{\text{αύξηση αγωγιμότητας}} z$$

$$z-1 \xrightarrow{\text{αύξηση αγωγιμότητας}} z$$

$$q_z(t+dt) = q_z(t) \left(1 - (z\lambda + \mu)dt + o(dt) \right) + q_{2z}(t) (\mu dt + o(dt)) + q_{z-1}(t) (z\lambda dt + o(dt))$$

$$\frac{dq_z(t)}{dt} + (z\lambda + \mu)q_z(t) = \mu q_{2z}(t) + z\lambda q_{z-1}(t)$$

Συνολικά έχουμε δοσινόν

$$x^0: e \Delta q_0 = \mu q_1$$

$$x^1: e \Delta q_1 = \mu q_{21} + z \Delta q_0$$

$$x^2: e \Delta q_2 = \mu q_{22} + z \Delta q_1$$

$$x^{z-1}: z \Delta q_{z-1} = \mu q_{2z-1} + z \Delta q_{z-2}$$

$$x^z: (\mu + z\lambda) q_z = \mu q_{2z} + z \Delta q_{z-1}$$

$$\text{Θαυρω } Q(x) = \sum_{j=0}^{\infty} q_j x^j \quad |x| < 1$$

$$e \Delta Q(x) + \mu \left(Q(x) - \sum_{j=0}^{z-1} q_j x^j \right) = \frac{\mu}{x^2} \left(Q(x) - \sum_{j=0}^{z-1} q_j x^j \right) + z \lambda x Q(x)$$

$$Q(x) = \frac{\mu \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \sum_{j=0}^{z-1} q_j x^j}{\mu - \frac{\mu}{x^2} - z \lambda x}$$

$$Q(x) = \frac{\mu(1-x^c) \sum_{j=0}^{c-1} q_j x^j}{c\lambda x^{c+1} + (c\lambda + \mu)x^c + \mu} = \frac{(1-x^c) \sum_{j=0}^{c-1} q_j x^j}{c\rho x^{c+1} + (c\rho + 1)x^c + 1} \quad \text{όπου } \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Θέλω $Q(x)$ να συγκρίνει $\Rightarrow$ ότι πότε έχει ο παρονομαστής να τ'ε
 έχει και ο αριθμητής

$$\frac{c\rho x^{c+1} - (c\rho + 1)x^c + 1}{(1-x)(1 - \frac{x}{x_0})} = K \sum_{j=0}^{c-1} q_j x^j \Rightarrow$$

← μονώνες $c-1$ φορές

$$\frac{\sum_{j=0}^{c-1} q_j x^j (1-x^c)}{c\rho x^{c+1} - (c\rho + 1)x^c + 1} = \frac{1-x^c}{K(1-x)(1 - \frac{x}{x_0})}$$

Ξέρω ότι υπάρχει
 για $\rho > 1$ και
 για < 1

$$Q(x) = \frac{1-x^c}{K(1-x)(1 - \frac{x}{x_0})}$$

βλέπω ότι για $x=1$ $Q(x) = \frac{0}{0}$
 οπότε κάνω DLH

$$Q(1) = 1$$

$$Q'(1) = \frac{-c}{-K(1 - \frac{1}{x_0})} \Rightarrow K = \frac{c}{1 - \frac{1}{x_0}}$$

$$\text{Άρα } Q(x) = \frac{(1-x^c) \cancel{K(1-x)(1 - \frac{x}{x_0})}}{\frac{c(1-x)(1 - \frac{x}{x_0})}{1 - \frac{1}{x_0}}} = \frac{(1-x^c)(1 - \frac{1}{x_0})}{c(1-x)(1 - \frac{x}{x_0})} =$$

$$= (1-x^c) \left(\frac{A}{1-x} + \frac{B}{1 - \frac{x}{x_0}} \right)$$

$$\cancel{A = \frac{1}{c} \text{ και } B = -\frac{1}{cx_0}}$$

$$A = \frac{1}{c} \quad \text{και} \quad B = -\frac{1}{cx_0}$$

$$Q(x) = (1-x^c) \left(\frac{\frac{1}{c}}{1-x} - \frac{\frac{1}{cx_0}}{1-\frac{x}{x_0}} \right) = (1-x^c) \left(\frac{1}{c} \sum_{j=0}^{\infty} x^j - \frac{1}{cx_0} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_0}\right)^j \right)$$

$$= \frac{1}{c} \sum_{j=0}^{\infty} x^j - \frac{1}{cx_0} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_0}\right)^j - \frac{x^c}{c} \sum_{j=0}^{\infty} x^j + \frac{x^c}{cx_0} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{x}{x_0}\right)^j$$

$$q_j = \begin{cases} \frac{1}{c} - \frac{1}{cx_0^{j+1}}, & j < c \\ \frac{1}{c} - \frac{1}{cx_0^{j+1}} - \frac{1}{c} + \frac{1}{cx_0^{j-c+1}}, & j \geq c \end{cases}$$

$$q_j = \begin{cases} \frac{1}{c} \left(1 - \frac{1}{x_0^{j+1}}\right), & j < c \\ -\frac{1}{cx_0^{j+1}} \left(1 - \frac{1}{x_0^{c-j}}\right), & j \geq c \end{cases}$$

$$q_j = \begin{cases} \frac{1}{c} \left(1 - \frac{1}{x_0^{j+1}}\right), & j < c \\ p(x_0-1)x_0^{c-j+1}, & j \geq c \end{cases}$$

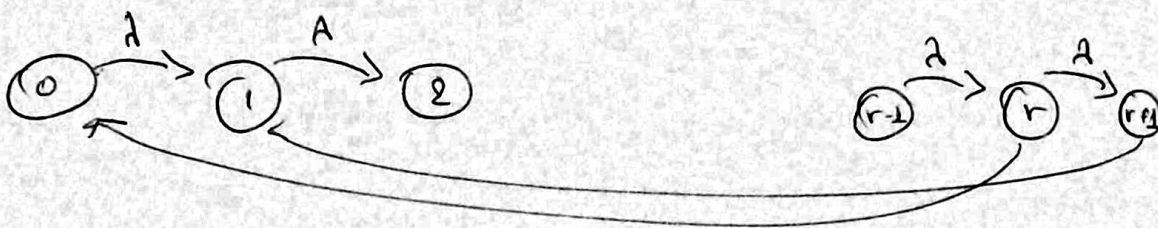
Σημει Να γίνει η περίπτωση που να θυμάται ότι $p_0 = 1-p$
 $p_c = \frac{p(x_0^c-1)}{x_0^c}, c=1,2,\dots$

(Παρα: Απαιτείται να παρατηρήσει ότι $cx_0^c - cx_0^{c+1} = 1 - x_0^c$)

~~Αντίστοιχο~~

Το σύστημα $E_r | M | 1/\infty$ είναι ισοδύναμο με $M | M^{[r]} | 1/\infty$

Σύστημα $M/M^{sr}/1/\infty$



αφίξη Poisson
 εξυπηρέτηση εκθετική αλλαγή σε ομάδες